ΣΠΟΥΔΑΙ - ΤΙΤΛΟΙ - ΔΡΑΣΙΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΙΩ. ΓΑΛΙΔΑΚΗ

ΑΡΙΣΤΟΥΧΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

ΑΘΗΝΑΙ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1969

Α' ΣΠΟΥΔΑΙ - ΤΙΤΛΟΙ

Ἐγεννήθην ἐν Ἀθήναις τὸν Νοέμβριον τοῦ 1929. Ἐπεράτωσα τὰς γυμνασιακάς μου σπουδάς εἰς τὸ ἐν Πειραιεῖ Γ'. Γυμνάσιον τῷ 1947 μὲ τὸν βαθμὸν 19 7/11 «ἄριστα» ἐλθὼν πρῶτος μεταξὺ τῶν μαθητῶν τοῦ Πειραιῶς.

Τὸ αὐτὸ ἔτος (1947) ἐνεγράφην κατόπιν ἐπιτυχῶν εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων (ἕβδομος κατὰ σειρὰν ἐπιτυχίας) εἰς τὸ Ἐθν. Μετσόβιον Πολυτεχνεῖον ὅπου ἠκολούθησα τὰ μαθήματα τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Πολιτικῶν Μηχανικῶν, τυχὼν κατὰ Ἰούνιον τοῦ 1952 τοῦ διπλώματος τοῦ Πολιτικοῦ Μηχανικοῦ.

Ὑποστὰς τὴν νενομισμένην δοκιμασίαν κατὰ Μάρτιον τοῦ 1968 ἀνηγορεύθην Διδάκτωρ Μηχανικὸς τοῦ Ε.Μ.Π. τυχὼν παμψηφεὶ τοῦ βαθμοῦ «ἄριστα».

Κατὰ τὴν χρονικὸν περίοδον 1959 – 1961 διετέλεσα Ἐπιμελητὴς ἐν τῇ ἕδρα τῆς «Δομικῆς Μηχανικῆς καὶ Στοιχείων Τεχνικῶν Ἔργων» ἐν συνεχείᾳ δὲ κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον 1966 – 1967 ἐπιμελητὴς ἐν τῇ ἕδρα τῆς «Στατικῆς καὶ τῶν Σιδηρῶν Γεφυρῶν» παρὰ τῷ Καθηγητῇ κ. Ε. Παναγιωτουνάκῳ.

Ἀπὸ τῆς 5ης Δεκεμβρίου 1967 μοῦ ἀνετέθησαν ὑπὸ τῆς Ἐθνικῆς Κυβερνήσεως τὰ καθήκοντα τοῦ Γενικοῦ Γραμματέως τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων.

Β' ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΔΙΟΔΡΟΜΙΑ

Κατὰ τὸ διάστημα 1952 – 1955 κατ' ἀρχὰς ὡς Ἐπίκουρος καὶ κατόπιν ὡς ἔφεδρος Σημαιοφόρος Μηχανικὸς ὑπηρέτησα εἰς Ναυτ. Διοίκησιν Κρήτης καὶ Γεν. Ἐπιτελεῖον Ναυτικοῦ εἰς τὸ Γραφεῖον Μελετῶν καὶ Ἐπιβλέψεων ἔργων ὑποδομῆς τοῦ Ν.Α.Τ.Ο. Ἀπὸ τοῦ ἔτους 1955 ὅτε ἀπελύθην τῶν τάξεων τοῦ Ναυτικοῦ, μέχρι τοῦ 1959, παρέμεινα ἐπὶ συμβάσει Μηχανικὸς Προϊστάμενος τοῦ τμήματος Μελετῶν ἔργων Ν.Α.Τ.Ο.

Παραιτηθεὶς τῷ 1959 συνειργάσθην μετὰ τῆς Ἑταιρείας Μελετῶν «Εὐπαλῖνος» μέχρι καὶ τοῦ ἔτους 1961 ὁπότε ἀποχωρήσας ἵδρυσα ἴδιον Τεχνικὸν Γραφεῖον Μελετῶν σοβαρῶν ἔργων τὸ ὁποῖον καὶ διετήρησα μέχρι τοῦ Δεκεμβρίου 1967.

Δὲν κρίνω ἄσκοπον νὰ παραθέσω ὡρισμένας ἐκ τῶν ἐκπονηθεισῶν μελετῶν ἔνιαι τῶν ὁποίων προεκάλεσαν συζητήσεις καὶ εὐμενεῖς κρίσεις ἐπὶ διεθνοῦς ἐπιστημονικοῦ ἐπιπέδου.

— Στατικὴ μελέτη ὑπογείων ἐξ ὡπλισμένου σκυροδέματος πετρελαιοδεξαμενῶν Ν.Α.Τ.Ο. εἰς Κρήτην καὶ Σαλαμῖνα. Ἑκάστη κυλινδρικὴ δεξαμενὴ (ἔχουσα τὸν ἄξονα ὁριζόντιον) μήκους 50 m. διαμέτρου τυμπάνων 16 m καὶ πάχους 0.50 m ὑπελογίσθη ὡς κέλυφος εὑρισκόμενον ἐν ἐπαφῇ μετὰ ἐλαστικοῦ ἐδάφους.
Τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν τῆς Γραμμικῆς Στατικῆς ἐμφανίζει κατὰ τὴν ἐπίλυσίν του σοβαρὰς θεωρητικὰς ἀλλὰ καὶ πρακτικὰς

δυσχερείας. (Ἀξία ἔργου περὶ τὰ 300.000.000 Δρχ.).

— Μελέτη ὑπογείου ἠλεκτρικοῦ Σταθμοῦ Ν.Α.Τ.Ο. εἰς Κρήτην, εἰς ἀνομοιογενὲς ἔδαφος ἐμφανίζον σημειακὰς καταπτώσεις τῆς τάξεως τῶν 30 m. (ἀξία ἔργου περὶ τὰ 25.000.000 Δρχ.).

— Μελέτη γεφύρας ἐκ προεντεταμένου σκυροδέματος, ἀνοίγματος περὶ τὰ 150 m εἰς Γαλλικὸν ποταμὸν καὶ ἐπὶ τῆς Ἐθνικῆς ὁδοῦ Ἀθηνῶν—Θεσ/νίκης. (Τμῆμα Αἰγίνιον—Θεσ/κη).

— Μελέται γεφυρῶν ἐκ προεντεταμένου σκυροδέματος ἐπὶ τῶν ποταμῶν Πηνειοῦ (παρὰ τὰ Τρίκαλα) καὶ Ἀχελώου (εἰς θέσιν Γλύστρα) συνολικοῦ ἀνοίγματος τῆς τάξεως τῶν 400 m.

— Στατικὴ Μελέτη κλειστοῦ Γυμναστηρίου Θεσ/νίκης περιλαμβάνουσα καὶ τὴν μελέτην τοῦ ἐκ προεντεταμένου σκυροδέματος (τρίτου εἰς τὸν κόσμον) χθαματοῦ σφαιρικοῦ κελύφους διαμέτρου 78 m καὶ πάχους 13 ἑκ. μετὰ περιμετρικῶν προβόλων ἀνηρτημένων ἐκ τοῦ κελύφους ἀνοίγματος 8 m.

Ἡ ὡς ἄνω μελέτη τεθεῖσα ὑπ' ὄψιν τοῦ καθηγητοῦ Rüsch ὑπὸ τοῦ ὁρισθέντος ἐπόπτου τοῦ Ὑπουργείου Δημ. Ἔργων καθηγητοῦ Ἀχ. Σιμοπούλου ἀπέσπασεν λίαν κολακευτικοὺς διὰ τὸν μελετητὴν χαρακτηρισμούς.

Γ' ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙΣΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ

1. **Ὀρθογωνικαὶ ἐσχάραι ἀνωδομῆς καὶ θεμελιώσεως**
   (μετὰ τοῦ καθηγητοῦ Ε. Παναγιωτουνάκου)

   Ἐδημοσιεύθη εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 425 τεῦχος τοῦ 1959 τῆς Ἐπιστημονικῆς Ἐκδόσεως Τεχν. Χρονικῶν.

2. **Τὸ διδιάστατον ἐντατικὸν πρόβλημα ἐπὶ μιᾶς ἰδιαζούσης φύσεως ἀνισοτροπίας**

   Ἐδημοσιεύθη εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 3 τεῦχος τοῦ 1967 τῆς Ἐπιστημ. Ἐκδόσεως Τεχνικῶν Χρονικῶν.

3. **Ἐπὶ τῶν ἡμιαπείρων ἐλαστικῶν δίσκων τῶν ἀπεικονισίμων εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $y<0$**

   Ἐδημοσιεύθη εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 1 τεῦχος τοῦ 1968 τῆς ἐπιστημ. Ἐκδόσεως Τεχν. Χρονικῶν.

4. **Τὸ πρόβλημα τῆς ρωγμῆς εἰς τὸν γενικῶς ἀνισότροπον δίσκον.**

   Ὑπεβλήθη τὸν Ἀπρίλιον τοῦ 1967 εἰς τὸ Ε.Μ.Π. ὡς διατριβὴ πρὸς ἀπόκτησιν τοῦ τίτλου τοῦ διδάκτορος τοῦ Ε.Μ.Π. καὶ ἐγένετο δεκτὴ τυχοῦσα τοῦ βαθμοῦ «ἄριστα» τὸν Μάρτιον τοῦ 1968.

5. **Ὁ στερεὸς ἐλειπτικὸς πυρὴν εἰς τὸν γενικὸν ἀνισότροπον δίσκον.**

   Ἐδημοσιεύθη εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 2 τεῦχος τοῦ 1968. τῆς ἐπιστημ. ἐκδόσεως τῶν Τεχνικῶν Χρονικῶν.

6. **Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ὁλοκληρώματος Cauchy κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος ἀστροβίλου ροῆς πέριξ ἑνὸς profil.**

   Ἐδημοσιεύθη εἰς τὸ τεῦχος Νοεμβρίου 1968 τῶν Τεχνικῶν Χρονικῶν.

Δ΄ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΡΓΑΣΙΩΝ

I. Ὀρθογωνικαὶ ἐσχάραι ἀνωδομῆς καὶ θεμελιώσεως

Αἱ ὀρθογωνικαὶ ἐσχάραι δοκῶν, ἀποτελοῦσαι φορεῖς ἐν τῷ χώρῳ ἐφαρμόζονται εἴτε ὡς συστήματα διασταυρουμένων δοκῶν ἐν τῇ ἀνωδομῇ εἴτε ὡς ἐσχάραι θεμελιώσεων ἐν τῇ ὑποδομῇ.

Ἕκαστος κόμβος, ἤτοι τὸ σημεῖον τομῆς δύο ὀρθογωνίως τεμνομένων δοκῶν, μορφοῦται δι' ἁπλῆς στηρίξεως τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης δοκοῦ μέσῳ ἀπολύτως στερεᾶς δεσμικῆς ράβδου.

Παραλείπονται οὕτω, βάσει τῆς παραδοχῆς ταύτης, αἱ ροπαὶ στρέψεως καὶ κάμψεως τῶν ὁποίων αἱ ἐπιρροαὶ εἶναι εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων ἀμελητέαι.

Κεντρικὴ ἰδέα τῆς ἐργασίας εἶναι ἡ ἀντιστοίχισις (κατὰ τὴν μορφήν) τῆς ἐσχάρας τῶν $m \times n$ κόμβων πρὸς μητρῷον διαστάσεων $m \times n$ ἢ τὸ αὐτό, μόρφωσιν τοῦ μητρώου τῶν ἀγνώστων (ὑπὸ τὰς ὡς ἄνω προϋποθέσεις ἀντιστοίχως) εἰς ὀρθογωνικὸν μητρῷον διαστάσεων $m \times n$.

Τὸ πρόβλημα ὑπὸ τὴν ὡς ἄνω παραδοχὴν τυγχάνει $\nu = m \times n$ φορὰς στατικῶς ἄριστον, ὅπου ν παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀρθογωνίως τεμνομένων δύο συστημάτων δοκῶν $i = 1,2 \ldots m$ καὶ $J = 1,2, \ldots n$ τῶν ἀποτελούντων τὴν ἐσχάραν.

Ἡ συνήθης ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος ὁδηγεῖ εἰς γραμμικὸν σύστημα $n = m \times n$ ἐξισώσεων (μετὰ ἰσαρίθμων ἀγνώστων) τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίλυσις προϋποθέτει

ἀντιστροφὴν τετραγωνικοῦ μητρώου διαστάσειν $\nu \times \nu = [m \times n] \times [m \times n]$.

Διὰ τῆς προηγουμένως ἀναφερθείσης ἀντιστοιχίσεως τὸ πρόβλημα ὁδηγεῖ εἰς «μητρικήν» ἐξίσωσιν (Matrizengleichung) τῆς μορφῆς $AXB \times \Gamma X \Delta = E$ ὅπου X τὸ μητρῷον τῶν ἀγνώστων (τῶν τάσεων τῶν δεσμικῶν ράβδων) διαστάσεως $m \times n$, A, Γ τετραγωνικὰ γνωστὰ μητρῷα διαστάσεων $m \times m$, B, Δ τετραγωνικὰ γνωστὰ μητρῷα διαστάσεων $n \times n$

Ἡ ἐπίλυσις τῆς «μητρικῆς» ἐξισώσεως ἤτοι ὁ καθορισμὸς τοῦ ἀγνώστου μητρώου X συναρτήσει τῶν γνωστῶν μητρώων A, B, Γ, Δ καὶ E, ἐπιτυγχάνεται διὰ πρωτοτύπου μεθόδου ὡς $x = (\rho_j \delta_j)[(-1)^{i+1} \rho_i f^i]^{-1}$ ὅπου i καὶ j δεῖκται ἀθροίσεως $0, 1, 2, \ldots m$

$\delta_j = \delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$ $f^i = f^0, f^1, \ldots f^m$ γνωστὰ μητρῷα καὶ $\rho_j = (\rho_0, \rho_1 \ldots \rho_m)$ συντελεσταὶ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως ἐπίσης γνωστοῦ μητρώου.

Ἐν κατακλεῖδι ὑπογραμμίζεται ἡ σημασία τῆς μελέτης.

α) Κατὰ τὴν μορφολογίαν. Διότι ἡ μητρικὴ ἐξίσωσις ἐπιτρέπει ταυτόχρονον κατάστρωσιν τοῦ συστήματος τῶν $m \times n$ γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

β) Κατὰ τὴν οἰκονομίαν τῆς λύσεως. Ἡ ἐπιτευχθεῖσα λύσις τῆς μητρικῆς ἐξισώσεως ἐπήνεγκεν εἰσαγωγὴν μητρώων διαστάσειν $m \times m$, $n \times n$ καὶ $m \times n$ ἤτοι σημαντικῶς μικροτέρων τῶν διαστάσεων $[m \times n] \times [m \times n]$ τοῦ μητρώου τῶν σταθερῶν ὅρων τῆς κλασσικῆς λύσεως, καὶ

γ) Κατὰ τὸ μαθηματικὸν μέρος: Ἐπελύθη ἓν πρόβλημα ἀφορῶν εἰς τὴν γραμμικὴν ἄλγεβραν τῶν μὴ ἐκφυλισμένων μητρώων, παραλλήλως δὲ τίθεται καὶ τὸ ἀναπάντητον μέχρι στιγμῆς ἐρώτημα τῆς ἐπιλυσιμότητος τῆς μητρικῆς ἐξισώσεως πλήθους «μελῶν» μεγαλυτέρων τῶν δύο.

II. Τὸ Διδιάστατον ἐντατικὸν πρόβλημα ἐπὶ μιᾶς ἰδιαζούσης φύσεως ἀνισοτροπίας.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν Γενικῆς Ἀνισοτροπίας τοῦ Ἐπιπέδου, ἡ συνάρτησις Φ τοῦ Airy ἱκανοποιεῖ τὴν κάτωθι διαφορικὴν ἐξίσωσιν.

$$\alpha_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} - 2\alpha_{23}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y} + (2\alpha_{12}+\alpha_{13})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} - 2\alpha_{12}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3} + \alpha_{11} = 0 \qquad (1)$$

Τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως χαρακτηριστικὴ ἀλγεβρικὴ εἶναι ἡ $\alpha_{11}\rho^4 - 2\alpha_{13}\rho^3 + (2\alpha_{23}+\alpha_{33})\rho^2 + 2\alpha_{23}\rho + \alpha_{22} = 0$ (ὅπου αij ἐλαστικαὶ σταθεραὶ ἐξαρτώμεναι ἐκ τοῦ προσανατολισμοῦ τῶν ἀξόνων) καὶ τῆς ὁποίας ρίζαι εἶναι μιγαδικοὶ (ἢ καθαρῶς φανταστικοί) ἀριθμοί.

Ἐὰν ἔχομεν $\rho_1 = \rho_2$ δι' ἓν σύστημα ἀξόνων ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ διὰ πᾶν ἄλλο θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\rho'_1 = \rho'_2$ ἤτοι ἡ ὕπαρξις διπλῶν ριζῶν εἰς τὴν (1) εἶναι ἰδιότης ἀναλλοίωτος ὡς πρὸς τοὺς μετασχηματισμοὺς τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν. Δυνάμεθα τότε νὰ καθορίσωμεν τὴν ἰδιάζουσαν ἐλαστικὴν συμπεριφορὰν τοῦ δίσκου βάσει τοῦ ἀνωτέρω κριτηρίου ὀνομάζοντες τὴν κατάστασιν αὐτὴν «Ψευδοανισοτροπίαν».

Ἓν πρόβλημα ἐπιπέδου «Ψευδοανισοτρόπου» ἐλαστικότητος ἀποδεικνύεται ὅτι ἀνάγεται εἰς ἓν «εἰκονικὸν» ἰσότροπον.

Πρὸς τοῦτο εἰσάγομεν δύο ὁμοπαραλλήλους (ἐν γένει διαφόρους μεταξύ των) μετασχηματισμοὺς τοῦ ἐπιπέδου διὰ τῶν ὁποίων μετασχηματίζομεν ἀντιστοίχως τὸν «χῶρον» καὶ τὴν «ἔντασιν».

Ὁ μὲν χῶρος μετασχηματίζεται ὑπὸ τοῦ K_1 τοιούτου ὥστε $K_1(x+iy) = (x+\alpha y) + i\beta y$ ἡ δὲ ἔντασις ὑπὸ

τοῦ K_2 τοιούτου ὥστε $K_2 (X + i\Psi) = \frac{X + \alpha\Psi}{\beta} + i\Psi$

Ἀναζητοῦνται ἐπίσης καὶ καθορίζονται αἱ νέαι ἐλαστικαὶ σταθεραὶ E′ καὶ G′ τοῦ ἰσοτρόπου χωρίου – εἰκόνος ὡς κάτωθι.

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{\sqrt{Ex\,Ey}} - \alpha_{12}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \text{ καὶ } \frac{1}{2G'} = \frac{1}{2Gxy} - \alpha_{12}\,(2\alpha + \beta)$$

ἐπιτυγχανομένης οὕτω ἀπ' εὐθείας λύσεως εἰς προβλήματα δι' ἃ οἱ Green καὶ Zerna ἀναφέρουν εἰς τὸ Κλασσικὸν των Σύγγραμμα Theoretical Elasticity p. 207 ὅτι ἡ λύσις των συνάγεται δι' ὁριακῶν προσεγγίσεων ἐκ τῆς γενικῆς τοιαύτης.

Τέλος, ἐκ τῆς ἐρεύνης τοῦ ἰσοτρόπου προβλήματος — εἰκόνος γενικεύεται τὸ γνωστὸν θεώρημα τῆς μαθηματικῆς θεωρίας ἐλαστικότητος ἐπὶ τῆς δυνατότητος ὑπάρξεως λύσεων ὑπὸ κλειστὴν μορφὴν ὡς κάτωθι :

«Ἱκανὴ» συνθήκη ἵνα ἓν πρόβλημα ἐπιπέδου «Ψευδοανισοτρόπου» ἐλαστικότητος ἐπιλύεται ὑπὸ συναρτήσεων κλειστῆς μορφῆς εἶναι τὸ «ρητόν» τῆς συναρτήσεως συμμόρφου ἀπεικονίσεως ἐπὶ τοῦ μοναδιαίου κύκλου τοῦ χωρίου $S_1 = K\,S$ ὅπου S τὸ ἀρχικὸν χωρίον καὶ K τυχὼν ὁμοπαράλληλος μετασχηματισμός.

Ἄμεσος συνέπεια τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, εἶναι ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀδυνάτου τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ἐντατικοῦ προβλήματος κυκλικοῦ «Ψευδοανισοτρόπου» δίσκου διὰ συναρτήσεων κλειστῆς μορφῆς.

III. Ἐπὶ τῶν Ἡμιαπείρων ἐλαστικῶν δίσκων τῶν ἀπεικονισίμων εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $\psi < 0$

Παρὰ τὴν ἐνοποίησιν τῶν συγχρόνων μεθόδων τῆς Μαθηματικῆς θεωρίας Ἐλαστικότητος τῶν ἐφαρμοζομένων διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν ἁπάντων τῶν διδιαστάτων προ-

βλημάτων, εἶναι πολλάκις χρήσιμον νὰ διαφοροποιοῦνται αὗται κατὰ τὴν ἐπίλυσιν ὡρισμένων γενικῶν κατηγοριῶν χωρίων.

Μία μεγάλη κατηγορία εἶναι καὶ τῶν ἡμιαπείρων δίσκων, τῶν ὁποίων τὸ περίγραμμα εἶναι «ἁπλῆ» ἀνοικτὴ γραμμὴ C ἐκτεινομένη κατ' ἀμφοτέρους τοὺς κλάδους εἰς τὸ ἄπειρον.

Δι' εἰσαγωγῆς καταλλήλων παραμέτρων ὁρίζεται ἡ «τάξις κυρτότητος» τοῦ χωρίου ὑπὸ γενικωτάτην ἔννοιαν καὶ ἀδιαφόρως τῶν τυχὸν ὑπαρχουσῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ περιγράμματος εἰς τὴν θεωρουμένην περιοχήν.

Ἐκ τῆς α priori γνωστῆς ὁμαλότητος τῆς λύσεως συνάγεται ἡ δομὴ τῶν συναρτήσεων $\Phi_1(z) = \varphi'_1(z)$ καὶ $\Psi(z) = \psi'_1(z)$ ὅπου $\varphi_1(z)$ καὶ $\psi_1(z)$ αἱ συναρτησιακαὶ παράμετροι (ἢ καὶ συναρτήσεις Goursat ὀνομαζόμεναι) τῆς γενικῆς λύσεως τῆς δισαρμονικῆς ἐξισώσεως.

Διὰ τῆς U ἐκφράζεται ἡ συνισταμένη τῆς ἐξωτερικῆς φορτίσεως $R = X + iZ$ ἡ ὁποία τελικῶς λαμβάνει τὴν μορφήν : $\left[X + i\Psi\right]_{A \to \infty}^{B \to \infty} = i\,(c_1 + \overline{d_1}) \ln \frac{r_2}{r_1} - (c_1 - d_1)\theta_1 + c_1\, i\,(e^{2i\theta_2} - e^{2i\theta_1})$

Διερεύνησις τῆς ὡς ἄνω σχέσεως ὁδηγεῖ εἰς τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα συμπεράσματα :

α) Ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων I καὶ II τῆς Μαθηματικῆς θεωρίας τῆς Ἐλαστικότητος εἶναι τὸ «περατωμένον τῆς συνισταμένης τῆς ἐξωτερικῆς φορτίσεως».

Ἡ ὡς ἄνω συνθήκη ἐξάγεται ὡς συνέπεια τῆς «κανονικότητος τῆς λύσεως καὶ δὲν ὑφίσταται λόγος νὰ τεθῇ ὡς ἀρχικὴ πρόσθετος δέσμευσις ὡς εἰς Muskhelishvili : Basic Problems of Mathematical theory of Elasticity

β) Εἰς περιοχὰς τάξεως κυρτότητος $\varphi = \pi$ ἀναγκαία

συνθήκη διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων I καὶ II εἶναι : ἡ συνισταμένη τῆς ἐξωτερικῆς φορτίσεως νὰ ἰσοῦται τῷ μηδενί.

Ἐν συνεχείᾳ ἐρευνᾶται καὶ ἐπιλύεται τὸ γενικὸν ἐνταστικὸν πρόβλημα ἑνὸς ἡμιαπείρου χωρίου τυχούσης τάξεως κυρτότητος ὑπὸ ἐπίσης τυχοῦσαν ἔντασιν.

Ἡ συνάρτησις $\Phi_1(z) = \Phi_1(\omega(\zeta)) = \Phi(\zeta)$ εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἀκολούθου ὁλοκληρωτικοδιαφορικῆς ἐξισώσεως :

$$\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\overline{\Phi(\sigma)}\cdot\omega(\sigma)]'}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{R}\cdot\omega'(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma \quad (1)$$

ὅπου $\omega(\zeta)$ ἡ συνάρτησις ἀπεικονίσεως τοῦ χωρίου ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου $\psi<0$ καὶ R ἡ συνάρτησις φορτίσεως.

Εὑρεθείσης τῆς $\Phi(\zeta)$ ἡ $\Psi(\zeta)$ προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως

$$\omega'(\zeta)\;\Psi'(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\Phi(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}]'}{\sigma-\zeta}\,d\sigma \quad (2)$$

Ἀποδεικνύεται ἀκολούθως ὅτι ἡ $\Phi(\zeta)$ εὑρίσκεται ἐκ τῆς (1) ὑπὸ κλειστὴν μορφὴν ἐὰν ἡ $\omega(\zeta)$ εἶναι συνάρτησις ρητή.

Πράγματι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ $\Phi(\zeta)$ ἀποδεικνύεται ὅτι δίδεται ὑπὸ τῆς κάτωθι σχέσεως :

$$\Phi(\zeta) = -\frac{1}{\omega'(\zeta)\cdot 2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{R}\cdot\omega'(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma + \sum_{\mu=1}^{\varkappa}\sum_{\nu=1}^{\alpha_\varkappa} \frac{C_{\mu\nu}}{(\zeta-\rho_\mu)^\nu}$$

διὰ $\mathrm{Im}(\zeta)<0$

ὅπου $C_{\mu\nu}$ μιγαδικαὶ ἐν γένει σταθεραί, ἡ μέθοδος προσδιορισμοῦ τῶν ὁποίων ἐκτίθεται λεπτομερῶς ἐν τῇ μελέτῃ.

Ἡ $\Psi'(\zeta)$ εὑρίσκεται κατόπιν τῶν προηγουμένων εὐκόλως καὶ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\Psi'(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\omega'(\zeta)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{R\cdot\omega'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma - \frac{\Lambda_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)} +$$

$$+\frac{1}{\omega'(\zeta)}\sum_{\mu=1}^{\varkappa}\sum_{\nu=1}^{\alpha_\varkappa}\frac{C_{\mu\nu}}{(\zeta-\rho_\mu)^\lambda}$$

ὅπου $\Lambda_0(\zeta)$ γνωστὴ συνάρτησις ὁλομορφικὴ ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου καὶ μηδενιζομένη εἰς τὸ ἄπειρον.

Εἰς ἐφαρμογὴν τῆς ἐκτιθεμένης θεωρίας ἐπιλύονται εὐχερῶς δύο προβλήματα τῶν ὁποίων ἡ ἀντιμετώπισις θὰ ἐθεωρεῖτο τουλάχιστον ἀνέφικτος διὰ τῶν κλασσικῶν μεθόδων.

IV. Τὸ πρόβλημα τῆς ρωγμῆς εἰς τὸν γενικῶς ἀνισοτροπον δίσκον (διατριβὴ ἐπὶ διδακτορίᾳ)

Θέμα τῆς ἐργασίας εἶναι ἡ ἔρευνα δι' ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων τοῦ προβλήματος τῆς ρωγμῆς εἰς τὸν γενικῶς ἀνισότροπον δίσκον, ἤτοι εἰς τὸ ἄνευ στοιχείων ἐλαστικῆς συμμετρίας ἐπίπεδον.

Ἡ ρωγμὴ θεωρουμένη ὡς ἁπλῆ κλειστὴ καμπύλη Jordan ἀπεικονίζεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ μοναδιαίου κύκλου ὑπὸ ρητῆς συναρτήσεως, ἐπιτυγχανομένου οὕτω, τοῦ καθορισμοῦ τῶν συναρτήσεων μιγαδικοῦ δυναμικοῦ ὑπὸ κλειστὴν μορφὴν διὰ περιπτώσεις γενικῶς μὴ αὐτοϊσορρόπου φορτίσεως ὡς καὶ δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις φορτίσεως ἐπὶ τοῦ περιγράμματος τῆς ρωγμῆς.

Καθίσταται, ἀκόμη, δυνατὴ ἐν τῇ ἐργασίᾳ ἀφ' ἑνὸς ἡ εὕρεσις, διὰ καταλλήλων ὁριακῶν προβάσεων, τῶν λύσεων τῶν προβλημάτων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸν ἐλαστικὸν ἡμίχωρον ὡς ὁριακῶν περιπτώσεων τῆς δοθείσης γενικῆς λύσεως καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ ἐξαγωγὴ συμπερασμάτων

ἐπὶ τῆς συστάσεως καὶ δομῆς τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου. Τέλος, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἐργασίαν ὑπ' ἀριθ. V προκύπτει ὅτι ἡ ἔλλειψις, ἡ ρωγμὴ καὶ ἡ εὐθεῖα καθορίζουν τὰ μόνα μέχρι στιγμῆς γνωστὰ χωρία ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐπιλύονται τὰ προβλήματα τῆς μαθηματικῆς θεωρίας ἀνισοτρόπου ἐλαστικότητος δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις φορτίσεως, ὑπὸ συναρτήσεων κλειστῆς μορφῆς.

Ἐν πρώτοις μετασχηματίζεται τὸ ἐπίπεδον z τοῦ ἀνισοτρόπου δίσκου ὑπὸ δύο ὁμοπαραλλήλων μετασχηματισμῶν $K_1 z = x + \rho_1 y$ καὶ $K_2 z = x + \rho_2 y$ (ὅπου ρ_1, ρ_2 αἱ δύο διάφοροι καὶ μὴ συζυγεῖς μιγαδικαὶ ρίζαι τῆς χαρακτηριστικῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως τῆς γενικευμένης διαφορικῆς ἐξισώσεως Airy) εἰς τὰ ἐπίπεδα z_1 καὶ z_2 ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τῶν ὁποίων κεῖται τὸ ἀναλλοίωτον διὰ τῶν μετασχηματισμῶν περίγραμμα C τῆς ρωγμῆς, ἐν συνεχείᾳ καθορίζονται αἱ ρηταὶ συναρτήσεις $\omega(\zeta)$, $\omega_1(\zeta_1)$ καὶ $\omega_2(\zeta_2)$ αἱ ὁποῖαι ὄχι μόνον ἀπεικονίζουν συμμόρφως τὰ περιγράμματα C, C_1 καὶ C_2 ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τῶν μοναδιαίων κύκλων τῶν εὑρισκομένων ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ζ, ζ_1 καὶ ζ_2 ἀλλὰ ἔχουν τὴν ἰδιότητα διὰ κάθε $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = e^{i\theta}$ τὰ προκύπτοντα $z_1 = \omega_1(\zeta)$ καὶ $z_2 = \omega_2(\zeta)$ καὶ νὰ εἶναι «προβολαί» ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ z.

Ἀκολούθως προσδιορίζονται αἱ συναρτήσεις μιγαδικοῦ δυναμικοῦ $\Phi_1(z_1)$ καὶ $\Phi_2(z_2)$ ὁλομορφικαὶ ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων z_1 καὶ z_2 καὶ καθορίζονται αἱ παράμετροι τῆς ἐντάσεως σ_x, σ_y, τ_{xy} καὶ τῶν συνιστωσῶν μετακινήσεως u, υ, ὡς συναρτήσεων τῶν μεταβλητῶν ζ_1, ζ_2 καὶ ἐν συνεχείᾳ τῶν μεταβλητῶν x, y ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ δίσκου.

Αἱ συναρτήσεις μιγαδικοῦ δυναμικοῦ ὡς ἀποδεικνύεται θὰ ἔχουν τὴν ἀκόλουθον μορφήν :

$$\Phi'_1(z) = \alpha_0 \zeta_1 + \alpha_1 \ln\zeta_1 + f^0_1(\zeta_1) \qquad (1)$$
$$\Phi'_2(z_1) = \beta_0 \zeta_2 + \beta_1 \ln\zeta_2 + f^0_2(\zeta_2)$$

ὅπου $f_1^0(\zeta_1)$ καὶ $f_2^0(\zeta_2)$ συνάρτήσεις ὁλομορφικαὶ διὰ $|\zeta_1|, |\zeta_2| > 1$ καὶ μηδενιζόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον.

Τὸ πρῶτον θεμελιῶδες πρόβλημα ἐπιλύεται διὰ τὰς τρεῖς βασικὰς περιπτώσεις φορτίσεως :

α) Ἀφόρτιστον περίγραμμα – δεδομέναι τάσεις εἰς τὸ ἄπειρον, ὁπότε ἡ γενικὴ λύσις ἀναγράφεται κατωτέρω.

$$\sigma_y = \sigma_y^\infty + 2\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{\rho_1-\rho_2}(\rho_2\sigma_y + \tau_{xy}^\infty)\frac{1}{\zeta_1^2-1} + \frac{1}{\rho_1-\rho_2}(\rho_1\sigma_y^\infty + \tau_{xy}^\infty)\frac{1}{\zeta_2^2-1}\right\}$$

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty + 2\mathrm{Re}\left\{-\frac{\rho_1^2}{\rho_1-\rho_2}(\rho_1\sigma_y^\infty + \tau_{xy}^\infty)\frac{1}{\zeta_1^2-1} + \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_2^2}(\rho_1\sigma_y^\infty + \tau_{xy}^\infty)\frac{1}{\zeta_2^2-1}\right\}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^\infty + 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2}(\rho_1\sigma_y^\infty + \tau_{xy}^\infty)\frac{\zeta_1^2-1}{1} + \frac{\rho_1-\rho_2}{-\rho_2}(\rho_1\sigma_y^\infty + \tau_{xy}^\infty)\frac{1}{\zeta_2^2-1}\right\}$$

β) Συνεχὲς ὁμοιομόρφως κατανεμημένον κάθετον ἐπὶ τοῦ περιγράμματος φορτίον p ἐπὶ τμήματος z′ z″ αὐτοῦ.

Ἡ δομὴ τῶν συναρτήσεων μιγαδικοῦ δυναμικοῦ συνάγεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐκ τῶν (1) διὰ $\alpha_0 = \beta_0 = 0$

Αἱ ὁριακαὶ σχέσεις μορφοῦνται ἐκ τῆς μελέτης τῶν συνθηκῶν τοῦ περιγράμματος λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ «πλειοτίμου» τῶν χρησιμοποιουμένων συναρτήσεων.

Αἱ συναρτήσεις μιγαδικοῦ δυναμικοῦ εὑρίσκονται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὡς κατωτέρω :

$$\Phi'_1(z_1) = \frac{-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{p}{2\pi i}\left\{-\frac{R}{2}\frac{1}{\zeta_1}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + (z_1 - z'')\ln\frac{\sigma_2-\zeta_1}{\sigma_1-\zeta_1}\right\} + \frac{Y_0}{2\pi i}\ln\frac{\sigma_1-\zeta_1}{\zeta_1}\right] + \alpha_1 \ln\zeta_1$$

$$\Phi'_2(z_2) = \frac{-\rho_1}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{p}{2\pi i}\left\{-\frac{R}{2}\frac{1}{\zeta_2}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + (z_1 - z'')\ln\frac{\sigma_2-\zeta_2}{\sigma_1-\zeta_2}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{Y_0}{2\pi i}\ln\frac{\sigma_1-\zeta_2}{\zeta_2}\right] + \beta_1 \ln \zeta_2$$

γ) Ὁμοίως εὑρίσκονται αἱ συναρτήσεις $\Psi'_1(z_1)$ καὶ $\Psi'_2(z_2)$ λόγῳ ὑπάρξεως συνεχῶς κατανεμημένου ἐφαπτομενικοῦ φορτίου ἐπὶ τμήματος τοῦ περιγράμματος τῆς ρωγμῆς. Δι' ὁριακῶν προβάσεων ἐπιλύονται ἐπίσης εὐχερῶς ὅλα τὰ γνωστὰ ἢ περίπου γνωστὰ προβλήματα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὸ ἀνισότροπον ἡμιεπίπεδον ὡς μερικαὶ περιπτώσεις τῶν εὑρεθεισῶν γενικῶν λύσεων.

Ἐκ τῆς συμπεριφορᾶς τοῦ ἀνισοτρόπου μέσου, ὡς καὶ ἐκ τῆς κατανομῆς τῶν τάσεων συνάγεται ἐπίσης ἡ μορφὴ τοῦ δεσμικοῦ μοριακοῦ πλέγματος εἰς τὸ γενικῶς ἀνισότροπον ὑλικόν, συμπέρασμα τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει τὴν ἰσχὺν τῶν χρησιμοποιηθεισῶν μαθηματικῶν μεθόδων.

Ἐν κατακλεῖδι ἀναφέρεται ἀπόσπασμα τῆς ὑπὸ τῆς ἁρμοδίας ἐπιτροπῆς ἐκ τῶν κ.κ. Ε.Παναγιωτουνάκου καὶ Π. Θεοχάρη συνταχθείσης ἐκθέσεως κρίσεως.

«Ἡ διατριβὴ περιέχει ἀναμφισβήτητον πρωτοτυπίαν συγκεντρουμένην κυρίως α) εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν γενικῶν σχέσεων ὑπὸ κλειστὴν μορφὴν διὰ τῶν ὁποίων καθορίζονται αἱ συναρτήσεις τάσεων καὶ συνιστωσῶν μετακινήσεως διὰ δεδομένας τάσεις μακρὰν τοῦ περιγράμματος, β) εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῆς ρωγμῆς διὰ συναρτήσεων κλειστῆς μορφῆς εἰς ἑκάστην τῶν περιλαμβανομένων ἐν τῇ διατριβῇ ἑτέρων δύο βασικῶν φορτίσεων διὰ καθορισμοῦ τῶν συναρτήσεων μιγαδικοῦ δυναμικοῦ, γ) εἰς τὴν δι' ὁριακῶν προβάσεων βάσει καταλλήλων μαθηματικῶν μετασχηματισμῶν, ἐφαρμογὴν τῶν γενικῶν ἐξισώσεων πρὸς ἐπίλυσιν καὶ γνωστῶν κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον προβλημάτων τοῦ ἐλαστικοῦ ἀνι-

σοτρόπου ἡμιχώρου καὶ δ) εἰς τὴν ἐξαγωγὴν ἀξιοσημειώτων συμπερασμάτων ἐκ τῆς διερευνήσεως τῶν εὑρεθεισῶν συναρτήσεων, ἁπάντων ἀναφερομένων εἰς τὸν γενικῶς ἀνισότροπον δίσκον. Ὁ ὑποψήφιος ἐξ ἄλλου, μὲ τὴν εὐρεῖαν μαθηματικήν του κατάρτισιν, ἐπιτυγχάνει, βασιζόμενος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων τὴν διὰ κομψῶν καὶ πρωτοτύπων μεθόδων ἀπόδειξιν ὡρισμένων βασικῶν θεωρημάτων τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῆς ἀνισοτρόπου ἐλαστικότητος χρησίμων διὰ τὴν περαιτέρω ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματός του».

V. Ὁ στερεὸς ἐλλειπτικὸς πυρὴν εἰς τὸν γενικῶς ἀνισότροπον δίσκον

Διὰ τῆς παρούσης ἐργασίας τίθεται, ἐπιλύεται καὶ ἐρευνᾶται τὸ πρῶτον, ἓν σοβαρὸν πρόβλημα ἀφορῶν εἰς τὴν Μαθηματικὴν θεωρίαν τῆς Ἀνισοτρόπου Ἐλαστικότητος. Πρῶτος ὁ N. Muskhelishvili ἐπέλυσε τὸ ἀντίστοιχον πρόβλημα διὰ τὴν περίπτωσιν ἐλαστικῶς ἰσοτρόπου δίσκου τῇ βοηθείᾳ τῶν συναρτήσεων μιγαδικοῦ δυναμικοῦ. (ἴδε Some Basic problems of the Mathematical theory of Elasticity ed. Noordhoff 1963).

Εἰς τὴν ὑπ' ὄψιν ἐργασίαν τῇ βοηθείᾳ δύο μὴ προφανῶν (διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς γενικῆς ἀνισοτροπίας) λημμάτων, γενικεύονται αἱ ἰδέαι τοῦ Muskhelishvili, ἐπιτυγχανομένης οὕτω ἑνότητος εἰς τὴν περιοχὴν αὐτὴν τῆς Μαθηματικῆς θεωρίας Ἐλαστικότητος.

Ἐν πρώτοις ἀναφέρονται αἱ συναρτήσεις τῶν μετακινήσεων u καὶ v ἐκφραζόμεναι ὑπὸ τῶν μιγαδικῶν δυναμικῶν καθὼς καὶ αἱ περιπτώσεις ἐντάσεως.

Αἱ τελευταῖαι εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

α) Δεδομέναι τάσεις εἰς τὸ ἄπειρον: σ_x, σ_y, τ_{xy} τοῦ πυρῆνος δυναμένου (ἢ ὄχι) νὰ περιστραφῇ.

β) Φόρτισις τοῦ κέντρου τοῦ πυρῆνος ὑπὸ δυνάμεως $F = X + iY$

γ) Φόρτισις τοῦ πυρῆνος ὑπὸ ροπῆς M_0.

Ἀνευρίσκονται αἱ συναρτήσεις ἀπεικονίσεως δι' ἐλλειπτικὸν πυρῆνα $z = \omega(\zeta)$, $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$, $z_2 = \omega_2(\zeta_2)$ (τοῦ ἀρχικοῦ ἐπιπέδου z καὶ τῶν δύο «προβολῶν» ἢ εἰκόνων του ὡς πρὸς τοὺς ὁμοπαραλλήλους μετασχηματισμοὺς K_1 καὶ K_2)

Αἱ συναρτήσεις ἔχουν τὴν αὐτὴν μορφὴν ἀλλὰ αἱ σταθεραὶ R καὶ m εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι πραγματικαὶ εἰς δὲ τὴν δευτέραν καὶ τρίτην μιγαδικαί.

Ἀκολουθεῖ ἡ θέσις καὶ ἀπόδειξις τῶν δύο λημμάτων ὡς καὶ ἡ εὕρεσις διὰ τῶν συναρτήσεων Μιγαδικοῦ Δυναμικοῦ (αἱ ἀντίστοιχοι σχέσεις τοῦ Blasius διὰ τὴν ἐλαστικότητα) τῆς ροπῆς ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων τῆς ὀφειλομένης εἰς ἐξωτερικὰς τάσεις Xn, Yn ἐπὶ ἑνὸς περιγράμματος C (κλειστοῦ ἢ ἀνοικτοῦ) ὡς

$$M = 2\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) - z_2\,\Phi'_2(z_2) - z_1\,\Phi'_1(z_1)]$$

διὰ C ἀνοικτὸν ἢ $M = 2\mathrm{Re}\,\{\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)\}$ διὰ C κλειστὸν

Ἀκολουθεῖ ἡ μόρφωσις τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν ἐπὶ τοῦ περιγράμματος καὶ ἡ βάσει τῆς θεωρίας τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων ὁλοκλήρωσις διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μιγαδικοῦ δυναμικοῦ.

Ἐκ τῆς διερευνήσεως τῶν ὡς ἄνω συναρτήσεων προκύπτουν τὰ ἑξῆς σημαντικὰ πορίσματα :

1) Ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ὁμοιότητος εἰς τοὺς γενικῶς ἀνισοτρόπους δίσκους μὲ ἐλλειπτικὸν πυρῆνα.

II) Ἔστω ὅτι εἰς τὸν ἄπειρον γενικῶς ἀνισότροπον δίσκον ὑφίσταται στερεὸς πυρὴν σχήματος S συμμετρικοῦ

ὡς πρὸς κέντρον K (ὅπου τὸ K ἀνήκει εἰς τὸν πυρῆνα) καὶ ὅτι εἰς τὸ K ἐφαρμόζεται ἡ δύναμις $F = X + i\Psi$. Ἀποδεικνύεται τότε, ὅτι: α) αἱ συναρτήσεις μιγαδικοῦ δυναμικοῦ ἢ ἐντάσεως ἔχουν ὁριακὰς συναρτήσεις διὰ $S \to 0$ ἀνεξαρτήτους τοῦ ἀρχικοῦ σχήματος τοῦ πυρῆνος. Ἑπομένως ἡ ἔκφρασις «Συγκεντρωμένον φορτίον εἰς ἓν σημεῖον τοῦ Ἰσοτρόπου ἢ ἀνισοτρόπου δίσκου δὲν στερεῖται νοήματος.

β) Ἐὰν εἰς τὸν πυρῆνα ἐφαρμοσθῇ μία ροπὴ M_0 τότε αἱ ὁριακαὶ συναρτήσεις διὰ $S \to 0$ δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ ἀρχικοῦ σχήματος τοῦ πυρῆνος. Ἑπομένως ἡ ἔκφρασις «συγκεντρωμένη ροπὴ εἰς σημεῖον τοῦ Ἰσοτρόπου ἢ Ἀνισοτρόπου δίσκου χρήζει περαιτέρω διασαφήσεως καὶ κακῶς χρησιμοποιεῖται ἐν τῇ παλαιοτέρᾳ καὶ συγχρόνῳ βιβλιογραφίᾳ.

VI. Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ὁλοκληρώματος Cauchy κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος ἀστροβίλου ροῆς πέριξ ἑνὸς «Profil».

Ἡ ἀντιμετώπισις διδιαστάτων προβλημάτων μονίμου ἀστροβίλου ροῆς πέριξ ἑνὸς δεδομένου Profil ὁδηγεῖ ὡς εἶναι γνωστὸν εἰς προβλήματα Dirichlet εἰς διδιαστάτους χώρους ἁπλῆς συνοχῆς.

Διὰ τῆς παρούσης ἐργασίας καὶ δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁλοκληρωμάτων Cauchy ἑνοποιοῦνται αἱ μέθοδοι ἐπιλύσεως ἁπλοποιουμένης σημαντικῶς τῆς ἐργασίας ἀναζητήσεως τῶν γενικῶν ἐξισώσεων.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν $f(z)$ τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς $z = x + iy$ τὸ μὲν πραγματικὸν μέρος της παριστᾷ τὴν συνάρτησιν δυναμικοῦ, ὁ δὲ πραγματικὸς συντελεστὴς τοῦ φανταστικοῦ μέρους της παριστᾷ τὴν συνάρτησιν ροῆς, μιᾶς κινηματικῶς δυ-

νατῆς ἀστροβίλου ἐπιπέδου κινήσεως, ἀσυμπιέστου ρευστοῦ.

Ἐκ τῆς διερευνήσεως τῶν φυσικῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος συνάγεται ὅτι ἡ ζητουμένη συνάρτησις $f(z)$ ἔχει τὴν κατωτέρω μορφήν:

$$f(z) = \overline{V}_\infty z + C_1 \ln z + f^*(z)$$

ὅπου $\overline{V}_\infty$, C_1 μιγαδικαὶ ἐν γένει σταθεραὶ καὶ $f^*(z)$ συνάρτησις μονότιμος ἀναλυτικὴ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ Profil καὶ μηδενιζομένη εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἡ $f^*(z)$ προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἀκολούθου ὁριακῆς ἐπὶ τοῦ περιγράμματος τοῦ Profil συνθήκης:

$$\mathrm{Re}\{-if^*(z)\} = (u - V_0 \text{συνα})\,\psi - (\upsilon - V_0 \text{ημα})\,x -$$

$$-\frac{\omega}{2}(x^2 + \psi^2) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln|z| + C = A(t) \quad \text{διὰ} \quad z = t \in L$$

καὶ ὅπου $u + i\upsilon$ ἡ ταχύτης τοῦ περιγράμματος, $Ve^{i\alpha}$ ἡ ταχύτης τῆς ροῆς εἰς τὸ $z = \infty$, ω ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ Profil, Γ ἡ κυκλοφορία καὶ C πραγματικὴ σταθερά.

Ἡ ζητουμένη συνάρτησις $-if^*(z)$ τίθεται ὑπὸ μορφὴν ὁλοκληρώματος τύπου Cauchy εἰς τὸ ὁποῖον ἡ νέα ἄγνωστος συνάρτησις «πυκνότητος» $\chi(\zeta)$ προκύπτει ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁλοκληρωτικῆς ἐξισώσεως.

$$\chi(t) + \int_L \chi(\zeta)\frac{\text{συν}(n, r)}{r}\,d\sigma = -2A(t) \qquad (1)$$

Εὑρεθείσης τῆς $x(t)$ ἡ $-if^*(z)$ προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως

$$-if^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\chi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

Ἀκολουθεῖ ἡ διερεύνησις τῆς (1) διὰ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη εἶναι ἐπιλύσιμος.

Ἐν συνεχείᾳ ἀναφέρεται μία τῶν συνηθέστερον ἐφαρμο-

ζομένων μεθόδων προσεγγιστικῆς ἐπιλύσεως ἡ καὶ τοῦ «ἐκφυλισμένου» πυρῆνος καλουμένη.

Τέλος, τίθεται καὶ ἀποδεικνύεται κατὰ τρόπον ἁπλοῦν ἡ (ἤδη γνωστή) ἰσοδυναμία τῶν προβλημάτων Dirichlet καὶ συμμόρφου ἀπεικονίσεως.

Ἡ εὕρεσις τῆς συναρτήσεως τῆς ἀπεικονιζούσης συμμόρφως τὴν ἄπειρον (ἢ πεπερασμένην) περιοχὴν Π εἰς τὸ ἐξωτερικὸν (ἢ ἐσωτερικὸν) τοῦ μοναδιαίου κύκλου προκύπτει ὡς λύσις προβλήματος Dirichlet ὁριακῆς ἐπὶ τοῦ περιγράμματος συνθήκης $\mathrm{Re}\{\varphi(t)\} = -\ln t$ διὰ $t \in L$

Εὑρεθείσης τῆς $\varphi(z)$ προκύπτει ἡ $\omega_1(z)$ ἐκ τῆς $\ln\omega_1(z) = \varphi(z)$ καὶ ἐκ τῆς τελευταίας ἡ $\omega(z)$ ἐκ τῆς $\omega(z) = z\omega_1(z)$.

Ἐν κατακλεῖδι ἐπιλύεται κατὰ τρόπον ἁπλοῦν τὸ γενικὸν πρόβλημα τῆς ροῆς περὶ ἑνὸς ἐλλειπτικοῦ Profil δεδομένων τῆς γωνίας προσπτώσεως τῆς ροῆς, τῶν ταχυτήτων τῆς ροῆς καὶ τοῦ Profil, τῆς γωνιακῆς ταχύτητος τοῦ Profil καὶ τῆς κυκλοφορίας.